

令和 8 年度

数 学

問 題 冊 子

[1]  $\triangle ABC$  とその内接円を考える. 内接円と辺  $BC$ , 辺  $CA$ , 辺  $AB$  との接点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  とし,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$ ,  $\triangle PQR$  の面積を  $T$  とする. このとき, 次の問いに答えよ. ただし,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  とする.

(1)  $\frac{T}{S}$  を  $a, b, c$  を用いて表せ.

(2)  $a = t, b = c = 1$  のとき,  $\frac{T}{S}$  の最大値とそれをとる  $t$  の値を求めよ.

[2] 座標平面上の放物線  $y = (x - 3)^2$  を  $C$  とし, 直線  $y = -x$  を  $l$  とする. 点  $P(t, -t)$  は  $l$  上を動くとし,  $C$  上の点で  $P$  からの距離が最小となるものを  $Q$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $t = 3$  のときの  $Q$  の座標と線分  $PQ$  の長さを求めよ.

(2)  $t = -3$  のときの  $Q$  の座標と線分  $PQ$  の長さを求めよ.

(3) 線分  $PQ$  の長さが最小となるときの  $P, Q$  の座標と線分  $PQ$  の長さを求めよ.

[3]  $a$  を実数とし, 二次関数  $f(x) = ax(1 - x)$  を考える. ただし,  $1 < a \leq 4$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $0 \leq x \leq 1$  のとき,  $0 \leq f(x) \leq 1$  であることを示せ.

(2) 方程式  $f(x) = x$  の実数解をすべて求めよ.

(3) 方程式  $f(f(x)) = x$  が異なる 4 つの実数解をもつような  $a$  の範囲を求めよ.

[4] (1)  $z + \frac{1}{z}$  が実数となるような複素数  $z$  全体を複素数平面上で図示せよ.

(2)  $z - z^2$  が実数となるような複素数  $z$  全体を複素数平面上で図示せよ.

(3)  $z + \frac{1}{z}$  と  $z - z^2$  がともに実数となるような複素数  $z$  をすべて求めよ.

(4)  $z + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$  となる複素数  $z$  について,  $z$  と  $\frac{1}{z^2}$  をそれぞれ極形式で表せ.